Tema 7.- CINEMÁTICA. MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS Y SU COMPOSICIÓN

1.- RELATIVIDAD DEL MOVIMIENTO

1.1.- ¿Reposo o movimiento?

El concepto de movimiento es relativo, depende respecto a qué punto lo consideremos.

1.2.- Sistemas de referencia

Un objeto se mueve cuando cambia de posición respecto a un sistema de referencia que se considera fijo. Los sistemas de referencia cartesianos son los más utilizados. Consisten en dos (si trabajamos en el plano) o tres (si trabajamos en el espacio) ejes perpendiculares entre sí, que se cruzan en el origen del sistema.

2.- POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO

2.1.- Vector posición

La posición de una partícula viene determinada por su **vector de posición**, que es un vector que va desde el origen de coordenadas O hasta el punto A donde está situada la partícula. En un plano el vector será:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \qquad \text{(En el espacio sería: } \vec{r} = \overrightarrow{OA} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\,)$$

El **módulo** del vector nos indica la distancia en línea recta entre la partícula y el origen del sistema.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Si la partícula se mueve, su vector de posición será una función del tiempo: $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{\imath} + y(t) \cdot \vec{\jmath}$

Por ejemplo: $\vec{r}(t) = (2t+3)\,\vec{\imath} + t^2\,\vec{\jmath}$. Dependiendo del tiempo su vector posición irá variando.

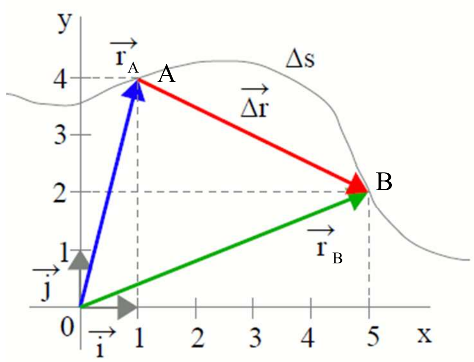
Esta expresión se denomina **ecuación vectorial del movimiento**.

2.2.- Vector desplazamiento

Cuando una partícula se desplaza de un punto A a otro B, el vector desplazamiento es el vector que va desde el punto inicial (A) al punto final (B).

Se representa por $\Delta\vec{r}$: $\quad \Delta\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A}$

$$\Delta\vec{r} = (x_b - x_A) \cdot \vec{\imath} + (y_B - y_A) \cdot \vec{\jmath}$$



(Ver ejercicio resuelto 1 de pág. 201)
(Hacer actividad 4 de pág. 201)

3.- TRAYECTORIA Y ESPACIO RECORRIDO

3.1.- Trayectoria

La **trayectoria** es la línea que una partícula describe en su movimiento y por tanto es la línea que uno las sucesivas posiciones que va ocupando la partícula en su movimiento.

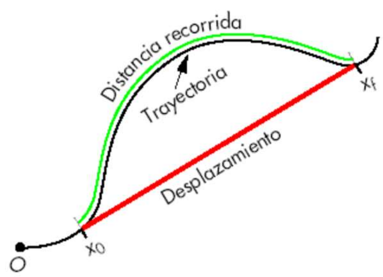
Una forma de obtenerla es expresar la componente "y" del vector de posición en función de la componente "x": y = f(x)

Según la forma de la trayectoria los movimientos pueden clasificarse en **rectilíneos** y **curvilíneos** (un caso especial de estos últimos son los movimientos **circulares**).

(Ver ejercicio resuelto 2 de pág. 202)

3.2.- Espacio recorrido

El espacio recorrido (Δs) es la distancia recorrida por una partícula medida sobre la trayectoria. No se trata de un vector.
Cuanto la trayectoria es recta el espacio recorrido coincide con el valor (o módulo) del desplazamiento. Si coinciden la posición inicial y la final el desplazamiento será cero, pero el espacio recorrido puede que no lo sea.

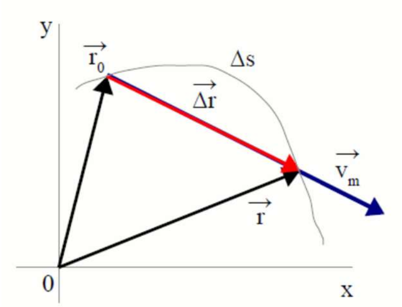


4.- CAMBIO DE POSICIÓN: VELOCIDAD

La velocidad ($\vec{v}$) es una magnitud vectorial que nos indica la rapidez con que se realiza un movimiento y la dirección y el sentido del mismo.
En el S.I. se mide en *m/s*.

4.1.- Velocidad media (v_m) : Es el cociente entre el desplazamiento efectuado y el tiempo transcurrido.

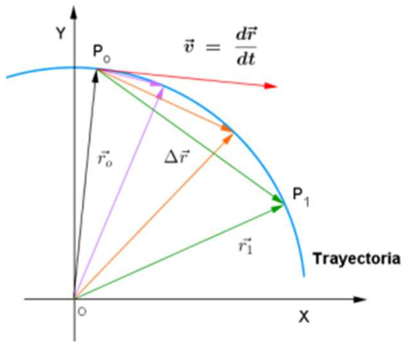
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_B} - \vec{r_A}}{t_B - t_A}$$



Se trata de un vector cuya dirección y sentido son los del vector desplazamiento.
Su módulo se calcula dividiendo el módulo del desplazamiento entre el tiempo: $v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t}$

4.2.- Velocidad instantánea (v) : Es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} = v_x \cdot \vec{\imath} + v_y \cdot \vec{\jmath}$$

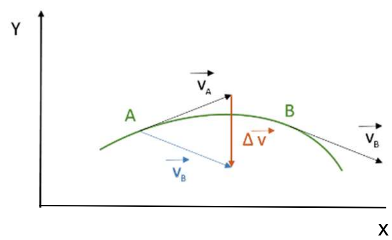


Dirección del vector: Tangente a la trayectoria en cualquier punto.
Sentido: El del movimiento
Módulo del vector: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

(Ver ejercicio resuelto 3 de pág. 203)
(Hacer actividad 7 de pág. 203)

5.- CAMBIOS DE VELOCIDAD: ACELERACIÓN

La aceleración (a) es una magnitud vectorial que nos indica la rapidez con que varía la velocidad. En el S.I. se mide en *m/s²*.

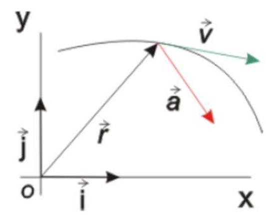


5.1.- Aceleración media (a_m)

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v_B} - \vec{v_A}}{t_B - t_A}$$

Es una magnitud vectorial cuya dirección y sentido coinciden con los del vector $\Delta\vec{v}$ (ver dibujo)

5.2.- Aceleración instantánea (a)



Se calcula, de forma similar a la velocidad instantánea, tomando un intervalo infinitesimal de tiempo:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath}$$

Se puede obtener a partir del vector posición derivando éste dos veces: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Consideraciones:

* Se produce aceleración al variar el vector $\vec{v}$, tanto si es en módulo como en dirección o sentido.
* La variación de velocidad puede ser positiva o negativa, lo que producirá aceleración positiva o negativa (la aceleración negativa es lo que conocemos como frenada).
* Es un vector que estará siempre apuntando hacia la concavidad de la curva de la trayectoria.
* Su módulo será: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

5.3.- Componentes intrínsecas de la aceleración

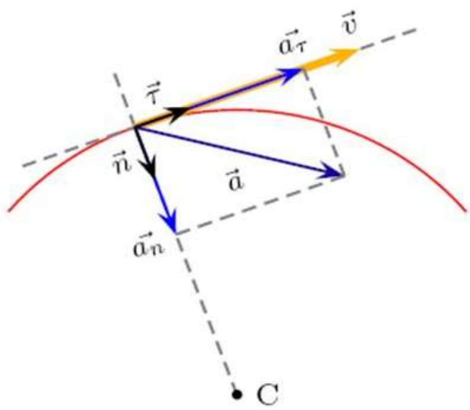
Para el estudio de movimientos curvilíneos interesa utilizar en cada punto de la trayectoria un sistema de referencia anclado al móvil (en lugar de un sistema cartesiano), en el que uno de los ejes es tangente ($\vec{\tau}$) a la trayectoria y otro es perpendicular ($\vec{n}$) a ella.

En este sistema de referencia las coordenadas del vector se denominan componentes intrínsecas, que son la **aceleración tangencial** ($\vec{a}_\tau$) y la **aceleración normal** ($\vec{a}_n$) o centrípeta:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad\qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

a) Aceleración tangencial: $\boldsymbol{\vec{a}_\tau = a_\tau \cdot \vec{\tau}}$

* Se produce cuando la velocidad cambia en valor (módulo).
* Su módulo se calcula: $a_\tau = dv/dt$
* Su dirección es la misma que la de la velocidad.
* Su sentido es el del movimiento (si v aumenta) o contrario al movimiento (si v disminuye)



b) Aceleración centrípeta o normal: $\boldsymbol{\vec{a}_n = a_n \cdot \vec{n}}$

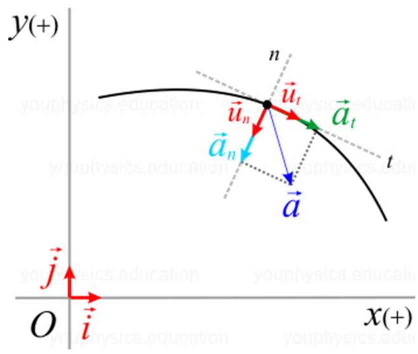
* Se produce cuando la velocidad cambia de dirección. Por tanto, solo se da en movimientos curvilíneos.
* Su módulo se calcula: $a_n = v^2/R$
* Su dirección es la del radio de la curva descrita.
* Su sentido es hacia el centro de la curva (punto C).

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \qquad\qquad a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

El vector aceleración instantánea, por tanto, puede expresarse de dos formas:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{\imath} + a_y \cdot \vec{\jmath} \qquad\qquad \vec{a} = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}$$

Componentes cartesianas — *Componentes intrínsecas*



(Ver ejercicio resuelto 4 de pág. 205)

5.4.- Tipos de movimientos

Los valores de las componentes intrínsecas de la aceleración nos informan sobre el tipo de movimiento (ver tabla de pág. 205):

a) Según el valor de la aceleración tangencial:

* Si es <u>nula</u>, el módulo de la velocidad es constante y el movimiento es **uniforme**.
* Si es <u>constante</u>, la velocidad va variando progresivamente y es **uniformemente acelerado**.
* Si es <u>variable</u>, la velocidad cambiará de manera variable y el movimiento es **acelerado no uniforme**.

b) Según el valor de la aceleración normal:

* Si es <u>nula</u>, el radio es infinito y el movimiento es **rectilíneo**.
* Si no es nula y el <u>radio es constante</u>, el movimiento es **circular**.
* Si no es nula y el <u>radio es variable</u>, el movimiento es **curvilíneo**.

Ejercicio: El vector de posición de una partícula, en unidades del SI, viene dado por: $\vec{r} = 3t^2\vec{\imath} + 2t^2\vec{\jmath}$.
Calcula:
a) El vector velocidad instantánea, su módulo y la velocidad media en los tres primeros segundos.
b) El vector aceleración, su módulo y la aceleración media en el intervalo anterior.
c) Las componentes intrínsecas de la aceleración.
d) La ecuación de la trayectoria.
e) El radio de curvatura de la trayectoria.

(Hacer actividades 4, 7, 10 y 11 de pág. 216 y 217)

6.- MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

Los movimientos se pueden describir de dos formas:

* **Mediante las ecuaciones de movimiento**: son ecuaciones que nos indican cómo varían con el tiempo las diversas magnitudes cinemáticas (espacio, velocidad y aceleración)

* **Mediante las gráficas del movimiento**: son gráficas que nos indican cómo varían con el tiempo las magnitudes cinemáticas (gráficas de la posición, la velocidad y la aceleración frente al tiempo)

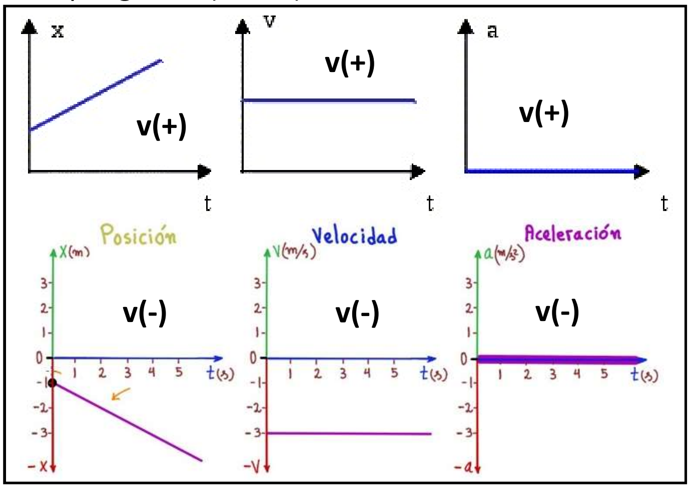
En los movimientos rectilíneos:

- coinciden el valor del desplazamiento con el espacio recorrido, pues la trayectoria es recta.
- sólo hay una coordenada de posición (el vector de posición $\vec{r}$ sólo posee una coordenada):
  * será "x" si el movimiento es horizontal.
  * será "y" si el movimiento es vertical.
- hay que establecer un criterio de signos para las magnitudes vectoriales.

6.1.- Movimiento rectilíneo uniforme (m.r.u.)

- Es aquel que transcurre con velocidad constante en módulo (por eso a_t=0 → uniforme) y en dirección y sentido (por eso a_n=0 → rectilíneo).
- El móvil recorre espacios iguales en intervalos de tiempo iguales ($v = v_m$)
- Ecuación del movimiento:

$$\boxed{x = x_o \pm v \cdot t}$$ (signo + indica que el móvil se aleja y signo – que se acerca)



- Gráficas del m.r.u. (Figuras de la derecha):
  * Gráfica de la posición (x) frente al tiempo (t): La pendiente de la recta es el valor de "v".
  * Gráfica de la velocidad (v) frente al tiempo (t): Sale una línea horizontal.
  * Gráfica de la aceleración (a): Siempre vale 0.

6.2.- Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.)

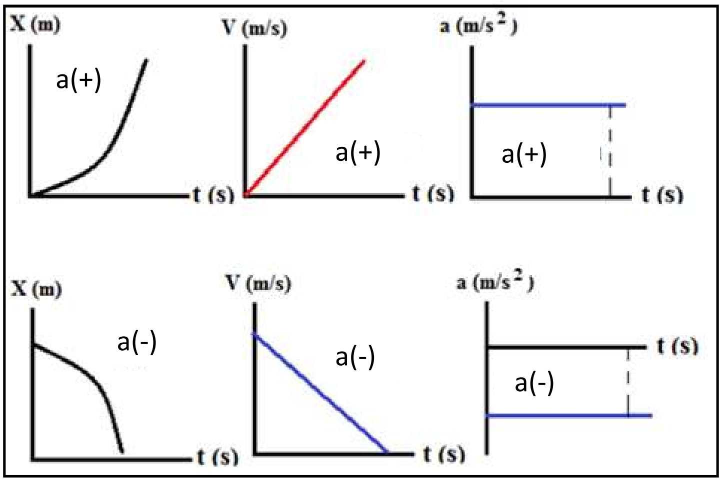
- Es aquel que transcurre con aceleración tangencial constante (uniformemente acelerado) y aceleración normal nula (rectilíneo).
- Las variaciones de la velocidad son iguales en intervalos de tiempo iguales ($a = a_m$).
- Ecuaciones del movimiento:
  * Ecuación de la velocidad: Se obtiene de $a = a_m = \Delta v/\Delta t$

$$\boxed{v = v_o \pm a \cdot t}$$ (signo + cuando el sentido de "a" coincide con el de "v_o", es decir, cuando aumenta "v")

  * Ecuación de la posición:

$$\boxed{x = x_o \pm v_o \cdot t \pm ½ \cdot a \cdot t^2}$$ (signos + cuando "v_o" y "a" se alejen del observador y – cuando se acerquen)

- Gráficas del m.r.u.a. (dibujos derecha):
  * Gráfica de la posición (x) frente al tiempo (t): sale una parábola.
  * Gráfica de la velocidad (v) frente al tiempo (t): sale una recta inclinada. La pendiente es la aceleración.
  * Gráfica de la aceleración (a) frente al tiempo (t): sale una recta horizontal. Por encima o por debajo de 0, según que la aceleración sea positiva o negativa.



(Ver ejercicios resueltos 5 y 6 de pág. 207)

<u>Caída libre y lanzamiento vertical</u> (son casos especiales del m.r.u.a)

Todos los cuerpos, independientemente de su masa, caen con la misma aceleración y, por tanto, llegan a la vez al suelo partiendo de la misma altura (siempre que no se considere la resistencia del aire).

Esta aceleración la comunica la Tierra y se denomina <u>aceleración de la gravedad</u>. Se representa por "g", vale aproximadamente 9,8 m/s^2 y su sentido es hacia el centro de la Tierra.

a) <u>Caída libre</u>: Se trata del movimiento de un cuerpo cuando se deja caer (no existe velocidad inicial) desde una cierta altura y sobre él sólo actúa la fuerza de atracción de la Tierra (y por tanto sólo actúa la aceleración "g").

Ecuaciones de movimiento para un observador situado en el suelo:

Ecuación de velocidad: $\mathbf{v = -g \cdot t}$

Ecuación de posición: $\mathbf{y = y_o - ½ \cdot g \cdot t^2}$

b) <u>Lanzamiento vertical (hacia arriba):</u> En este movimiento inicialmente "v" tiene sentido positivo, pero en la bajada "v" tiene sentido negativo.

Ecuaciones de movimiento:

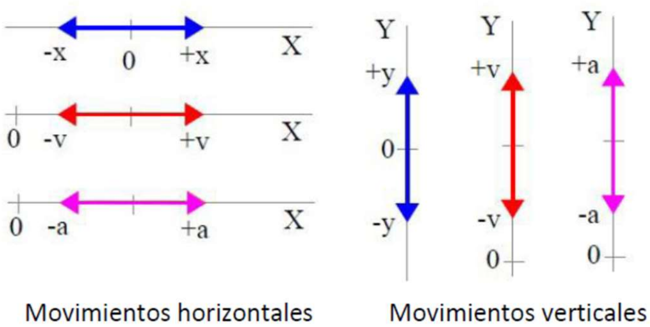
- Ecuación de velocidad: $\mathbf{v = v_o - g \cdot t}$
- Ecuación de posición: $\mathbf{y = y_o + v_o \cdot t - ½ \cdot g \cdot t^2}$ (si se lanza desde el suelo: $y_o=0$)

Aspectos a destacar de este movimiento:

- En la altura máxima la velocidad se hace 0.
- Al llegar al suelo la altura es 0.
- Tarda igual tiempo en subir que en bajar (si el punto de salida y de llegada es el mismo)
- Sale y llega con la misma velocidad (si el punto de salida y de llegada es el mismo)

(Hacer actividades 11, 13 y 14 de pág. 207)
(Hacer actividades 14, 15, 17, 18, 19, 22 y 26 de pág. 217 y 218)

RESUMEN DE LOS CRITERIOS DE SIGNOS PARA LA POSICIÓN, LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN



7.- COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

Vamos a estudiar movimientos que se producen en dos dimensiones, y por tanto tendrán una componente en la dirección "x" y otra en la dirección "y", como por ejemplo el movimiento de un balón al darle una patada.

En este tipo de movimientos hemos de tener en cuenta el Principio de Superposición: "Cuando un cuerpo está sometido simultáneamente a varios movimientos elementales independientes, el movimiento total se obtiene sumando vectorialmente dichos movimientos parciales".

Esto nos permite aplicar a cada movimiento componente sus propias ecuaciones y, para obtener las ecuaciones del movimiento compuesto, hemos de tener en cuenta que:

- La posición y la velocidad del móvil se obtendrán sumando vectorialmente los vectores de posición o de velocidad de cada uno: $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ $\quad \vec{v} = v_x \cdot \vec{\imath} + v_y \cdot \vec{\jmath}$
- El tiempo empleado en el movimiento compuesto es igual al empleado en cada uno de los movimientos componentes. $t = t_x = t_y$

7.1.- Composición de dos m.r.u. perpendiculares:

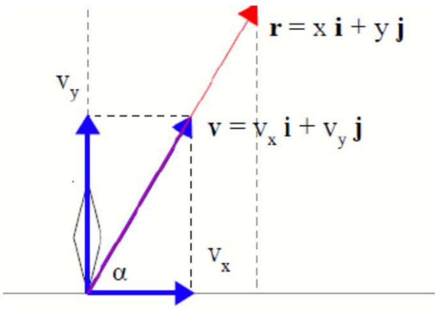
Ecuaciones de movimiento:

- Ecuaciones de posición: $\boxed{\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}}$

$x = v_x \cdot t \qquad y = v_y \cdot t$

- Ecuaciones de velocidad: $\boxed{\vec{v} = v_x \cdot \vec{\imath} + v_y \cdot \vec{\jmath}}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$



(Ver ejercicio resuelto 7 de pág. 208)

7.2.- Movimientos parabólicos

Están compuestos por:

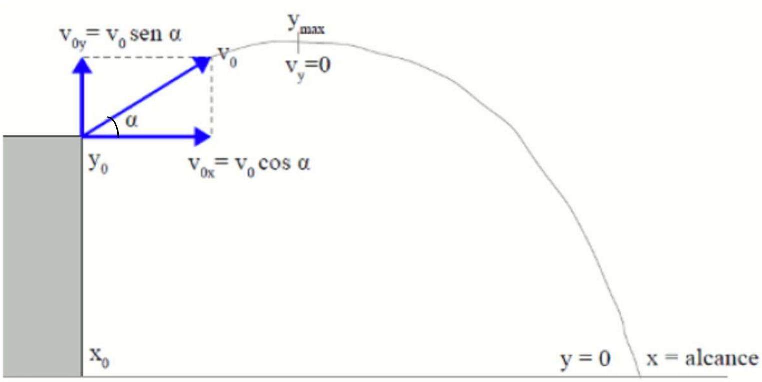
- un movimiento rectilíneo horizontal (eje X) con velocidad constante: m.r.u.
- un movimiento rectilíneo vertical (eje Y) con aceleración constante: m.r.u.a. (con a=g)
  * Si el lanzamiento es horizontal el m.r.u.a. es de caida libre.
  * Si el lanzamiento es inclinado el m.r.u.a. es lanzamiento vertical hacia arriba.

El caso general es el **tiro oblícuo**, que es un movimiento parabólico completo.

En este movimiento la velocidad inicial forma un cierto ángulo (α) con la horizontal.

Cada movimiento componente tendrá un valor de velocidad inicial, que vendrá dado por:

$$\begin{cases} v_{ox} = v_o \cdot \cos\alpha \\ v_{oy} = v_o \cdot \text{sen}\,\alpha \end{cases}$$



Ecuaciones de movimiento:

- Ecuaciones de posición: $x = v_{ox}\, t \qquad y = y_0 + v_{oy}\, t - ½\, g\, t^2$

$$\boxed{\vec{r} = (v_o \cdot cos \propto \cdot\, t) \cdot \vec{\imath} + \left(y_o + v_o \cdot sen \propto \cdot\, t - {}^1\!/_2\, g t^2\right) \cdot \vec{\jmath}}$$

- Ecuaciones de velocidad: $v_x = v_{ox} \qquad v_y = v_{oy} - g\, t$ $\quad \boxed{\vec{v} = (v_o \cdot cos \propto) \cdot \vec{\imath} + (v_o \cdot sen \propto - gt) \cdot \vec{\jmath}}$

Tiempo de vuelo: Tiempo que tarda en llegar al suelo. Se obtiene despejando "t" cuando y=0

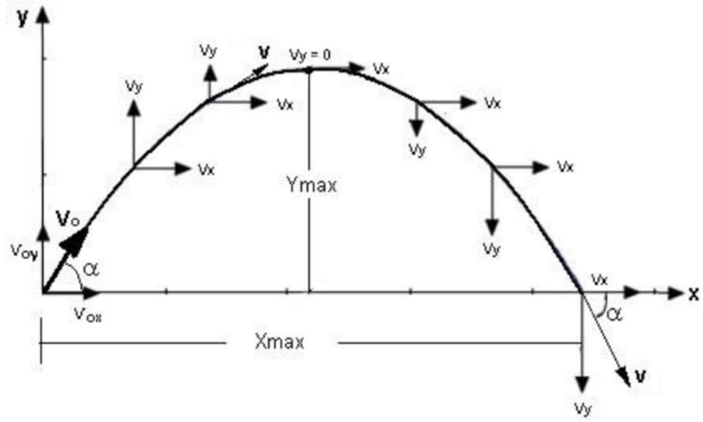
$$t_v = \frac{2 \cdot v_o \cdot sen \propto}{g}$$

Altura máxima: Se obtiene calculando "y" cuando v_y=0, teniendo en cuenta que t = t_v/2

$$h_{max} = y_{max} = \frac{v_o^2 \cdot sen^2 \propto}{2 \cdot g}$$

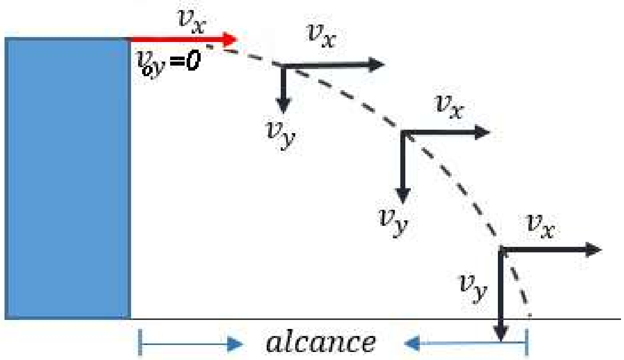
Alcance: Se obtiene calculando "x" cuando t = t_v

$$A = x_{max} = \frac{v_0^2 \cdot sen(2\propto)}{g}$$



* En el caso que el movimiento empiece en su punto más alto, en el que la velocidad solo tiene componente horizontal, se habla de **tiro horizontal**.

Sus ecuaciones serán similares a las anteriores, solo que considerando v_{oy} = 0



(Ver ejercicios resueltos 8 y 9 de pág. 210)
(Hacer actividades 31 y 33 de pág. 219)

Actividades de repaso: CINEMÁTICA

1.- El vector de posición de un móvil (en metros) en función del tiempo es $\vec{r}$ (t) = (2t+3) $\vec{i}$ + t^2 $\vec{j}$

a) Determina la posición del móvil en los instantes t=0s, t=1s y t=3s.
b) Calcula la distancia del móvil al origen de coordenadas en t=3s
c) Calcula el vector desplazamiento entre los instantes t=1s y t=3s, y su módulo.
d) Dibuja aproximadamente la trayectoria del móvil.

2.- Sea $\vec{r}$ (t) = $2t^2$ $\vec{i}$ + t $\vec{j}$ (m) el vector de posición de un móvil. Determina la expresión del vector velocidad instantánea y su módulo para el instante t=2 s.

3.- El vector velocidad instantánea de un determinado móvil es $\vec{v}$ (t)= (2t−1) $\vec{i}$ + 2 $\vec{j}$, en unidades S.I. Calcula, para t=2s, el vector aceleración instantánea y su módulo.

4.- La velocidad de un móvil (en m/s) en un instante determinado es $\vec{v}_o = -2\vec{i} - 2\vec{j}$ y, dos segundos después es $\vec{v} = 4\vec{i} + 10\vec{j}$. Calcula el vector aceleración media entre estos dos instantes y su módulo.

5.- La velocidad de un móvil que viaja en línea recta es $\vec{v}$ (t) = (t^2−3) $\vec{i}$. Determina:

a) El vector aceleración media entre t=1 y t=3s y su módulo.
b) El vector aceleración instantánea en t=1s y su módulo.
c) Las componentes intrínsecas de la aceleración.

6.- Un móvil toma una curva con una aceleración tangencial constante de 3 m/s^2. El radio de la curva es 150 m. ¿A qué aceleración total estará sometido el móvil en el instante en que su velocidad sea de 90 km/h? (Sol.: 5,13 m/s^2)

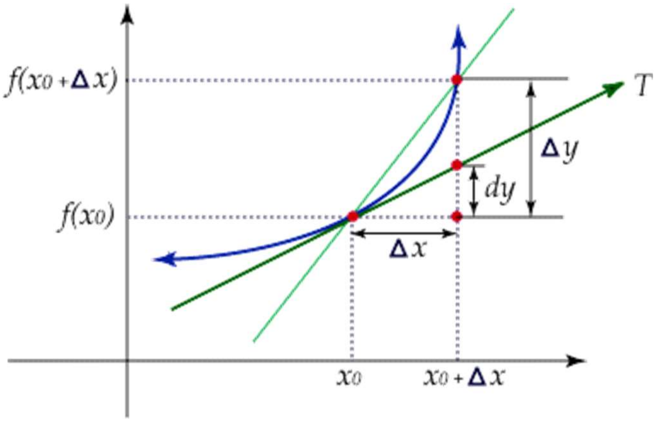
7.- Un coche viaja de noche a 72 km/h en línea recta y de repente encuentra en medio de la carretera un camión parado a 30 m de distancia. Frena con una aceleración de 5 m/s^2. Calcular el tiempo que tarda en detenerse. ¿Choca con el camión?. (Sol.: 4 s; Si)

ANEXO al tema 7: Concepto de derivada. Cálculo de derivadas de funciones sencillas.

Concepto de derivada: la derivada de una función f(x) mide la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente (x).

La derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente de la función en ese punto.

Para obtenerla, se calcula el límite de la variación de la función y=f(x) para una variación extremadamente pequeña de la variable independiente x:



$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

En la práctica, para calcular derivadas no se hace mediante este método de cálculo de límites, sino que existen unas reglas de derivación para hacer éste cálculo más sencillo. Dichas reglas las aprenderás con detalle en clase de matemáticas, no obstante resumimos a continuación las más básicas.

Derivadas de funciones sencillas:

La derivada de la función f(x) = a (siendo “a” una constante)

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a) = 0}$$

Por ejemplo: $\frac{d}{dx}(5) = 0$ Otro ejemplo: $\frac{d}{dx}(\pi) = 0$

La derivada de la función $f(x) = ax^n$:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(ax^n) = a \cdot n \cdot x^{n-1}}$$

Por ejemplo: $\frac{d}{dx}(4x^3) = 12x^2$ Otro: $\frac{d}{dx}(-2x^2) = -4x$

La derivada de la suma de dos funciones f(x) + g(x) :

$$\boxed{\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}}$$

Por ejemplo: $\frac{d}{dx}(3x^3 + x^5) = 9x^2 + 5x^4$

La derivada del producto de dos funciones f(x) · g(x)

$$\boxed{\frac{d(f \cdot g)}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot g + \frac{dg}{dx} \cdot f}$$

Por ejemplo: $\frac{d}{dx}[(-x^3) \cdot (2x - 5)] =$

$$= (-3x^2) \cdot (2x - 5) + 2 \cdot (-x^3) = -6x^3 + 15x^2 - 2x^3 = -8x^3 + 15x^2$$