Tema 8.- CINEMÁTICA. MOVIMIENTOS CIRCULARES Y OSCILATORIOS

1.- MAGNITUDES CINEMÁTICAS ANGULARES

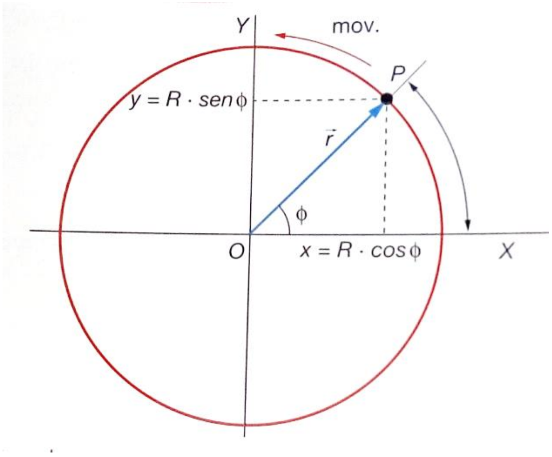
Los movimientos circulares son aquellos cuya trayectoria es una circunferencia.
Si situamos el sistema de referencia en el centro de la circunferencia, el vector de posición (en función de coordenadas cartesianas) se puede expresar como:

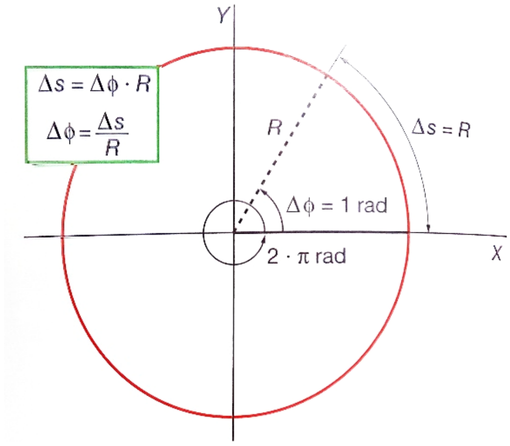
$$\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = R \cdot cos\varphi\,\vec{\imath} + R \cdot sen\varphi\,\vec{\jmath}$$

El módulo de dicho vector es constante y coincide con el radio.
Sin embargo, para estudiar este tipo de movimientos es más conveniente utilizar **magnitudes angulares**.

1.1.- Posición angular (φ)

Es el ángulo que forma el vector posición con el semieje X positivo.
Su unidad es el **radián** (rad): ángulo cuyo arco coincide con el radio de la circunferencia.
Relación entre radianes y grados: 1 vuelta = 360º = 2π rad





1.2.- Velocidad angular (ω)

Es la variación temporal de la posición angular, es decir la rapidez con que gira un cuerpo.
Las velocidades angulares media e instantánea se calculan:

$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Su unidad en el S.I. es **rad/s**, aunque también se utiliza r.p.m., cuya equivalencia es:

$$1\,rpm = 1\,\frac{rev}{min} = \frac{2\pi}{60}\,\frac{rad}{s} = 0{,}105\,rad/s$$

1.3.- Aceleración angular (α)

Es la variación temporal de la velocidad angular, es decir la rapidez con que varía la velocidad angular.
Las aceleraciones angulares media e instantánea se calculan:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Su unidad en el S.I. es **rad/s²**.

1.4.- Relación con las magnitudes lineales

En general podemos decir que las magnitudes lineales se obtienen multiplicando las angulares por el radio

Espacio recorrido: $\mathbf{\Delta s = \Delta\varphi \cdot R}$ Velocidad: $\mathbf{v = \omega \cdot R}$

Aceleración tangencial: $\mathbf{a_t = \alpha \cdot R}$ Aceleración normal: $\mathbf{a_n} = v^2/R = \omega^2 \cdot R^2/R = \mathbf{\omega^2 \cdot R}$

(Hacer ejercicio 1 de pág. 236)

2.- MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (m.c.u.)

Es aquel cuya trayectoria es una circunferencia y el módulo de su velocidad es constante.
Su aceleración tangencial será nula (a_t=0) y su aceleración normal o centrípeta será constante (a_n=cte).

2.1.- Ecuaciones y gráficas

Su velocidad angular será constante y su aceleración angular, como consecuencia, será nula.
Su ecuación de movimiento la obtenemos de:

$$\omega = \omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_o}{t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\varphi = \varphi_o + \omega \cdot t}}$$

Como observamos, esta ecuación es similar a la del m.r.u., solo que con magnitudes angulares.

2.2.- Periodo y frecuencia

El m.c.u. es un movimiento periódico, pues sus características se repiten cada cierto intervalo de tiempo.
En los movimientos periódicos es importante definir dos nuevas magnitudes:

a) **Periodo** (T): Es el tiempo que tarda el móvil en dar una vuelta completa. Se mide en segundos.
b) **Frecuencia** (f): Es el número de vueltas que da el móvil en un segundo. Se mide en: s^{-1} = Hercios.

Ambas magnitudes son inversas: $T = 1 / f$ o bien $f = 1 / T$

Podemos relacionarlas con la velocidad angular, recordando que en un periodo el cuerpo da una vuelta, es decir, 2π radianes:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

(Ver ejercicio resuelto 1 de pág. 223)
(Hacer ejercicio 2 de pág. 223 y ejercicios 8 y 10 de pág. 236)

3.- MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO (m.c.u.a)

Cuando la velocidad angular (ω) de un cuerpo varía, se produce una aceleración angular (α): $\alpha = \Delta\omega / \Delta t$
Un m.c.u.a. se produce cuando un movimiento circular posee **aceleración angular (α) constante**.

La aceleración tangencial será constante, ya que: $a_t = \alpha \cdot R$ = cte.
La aceleración normal será variable, ya que: $a_n = \omega^2 \cdot R \neq$ cte.

Aquí no tiene sentido hablar de periodo o de frecuencia pues no es un movimiento periódico.

3.1.- Ecuaciones y gráficas

Al ser la aceleración angular constante, la aceleración angular media coincide con la instantánea.
Su ecuación de movimiento la obtenemos de:

$$\propto = \propto_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_o}{t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\omega = \omega_o + \alpha \cdot t}}$$

Como observamos, esta ecuación es similar a la del m.r.u.a., solo que con magnitudes angulares.
La otra ecuación de movimiento también es similar a la del m.r.u.a.:

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi = \varphi_o + \omega_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \propto \cdot t^2}}$$

(Ver ejercicio resuelto 3 de pág. 225)
(Hacer ejercicios 4 y 5 de pág. 225 y 18 de pág. 237)

4.- MOVIMIENTO ARMÓNICO SÍMPLE

4.1.- Movimiento oscilatorio o vibratorio

Es el movimiento periódico de una partícula que se mueve alternativamente a un lado y otro de una posición de equilibrio sobre una misma trayectoria. Por ejemplo: movimiento de un péndulo, movimiento de un cuerpo colgado de un muelle…

El movimiento oscilatorio se suele llamar también movimiento armónico, pues se puede expresar mediante ecuaciones donde intervienen las funciones seno y coseno (funciones armónicas).

4.2.- Movimiento armónico simple (m.a.s.)

Es el movimiento oscilatorio más sencillo, pues se puede expresar mediante funciones armónicas de una sola variable.

Son característicos de los cuerpos elásticos y los producen fuerzas que son directamente proporcionales al desplazamiento de la partícula que vibra y dirigidas hacia la posición de equilibrio estable.

La ecuación del m.a.s. se puede expresar como: $\boldsymbol{x(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_o)}$

Magnitudes del m.a.s.:

- *Elongación* (x): distancia que separa al móvil de su posición de equilibrio. En el S.I. se mide en metros. Será positiva o negativa según el criterio cartesiano de signos (+ a la dcha. y – a la izda.).
- *Amplitud* (A): valor máximo de la elongación.
- *Fase* (φ) en cualquier instante es el ángulo $\varphi = \omega \cdot t + \varphi_o$: Determina el estado de vibración del movimiento. Se mide en radianes.
- *Fase inicial* (φ_o): valor de la fase cuando t = 0. Se mide en radianes. Su valor depende de en qué punto consideremos que empieza el movimiento (Si empieza en x=0 y va hacia la derecha $\varphi_o=0$.
- *Pulsación o frecuencia angular* (ω): Al igual que la velocidad angular se mide en *rad/s*.
- *Periodo* (T): Es el tiempo que tarda en realizar una vibración completa, es decir el tiempo que tarda la partícula en pasar dos veces por el mismo punto y con el mismo sentido. Se mide en segundos y se relaciona con la pulsación mediante: $T = 2\pi / \omega$
- *Frecuencia* (*f*): Es el número de vibraciones completas que la partícula realiza en un segundo. Se mide en Hz (s^{-1}). $f = 1 / T = \omega / 2\pi$
- *Vibración completa* o *ciclo*: movimiento de ida y vuelta, por ejemplo: de -A a A y vuelta a -A.

4.3.- Cinemática del m.a.s.

La ecuación de la velocidad instantánea la obtenemos de su definición:

$$\boldsymbol{v}\ (\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \cos(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\varphi_o})$$

La <u>velocidad será máxima</u> cuando $\cos(\omega t+\varphi_o) = 1$ y por tanto: $\boxed{\boldsymbol{v_{max}} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\omega}}$

Si el coseno vale 1, entonces el ángulo ($\omega t+\varphi_o$) valdrá 0, y como sen(0)=0, entonces x = A · 0 = 0.
Esto significa que **la velocidad será máxima en el centro de la trayectoria** (x=0) **y será nula en los extremos** (x=±A).

<u>*Criterio de signos*</u> de la elongación y la velocidad: Hacia la derecha son positivos y hacia la izquierda son negativos.

La ecuación de la aceleración la obtenemos de su definición:

$$\boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}} = -\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\omega}^2 \cdot \mathrm{sen}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\varphi_o})$$

La <u>aceleración será máxima</u> cuando *sen* $(\omega t+\varphi_o) = 1$, es decir: $\boxed{\boldsymbol{a_{max}} = -\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\omega}^2}$

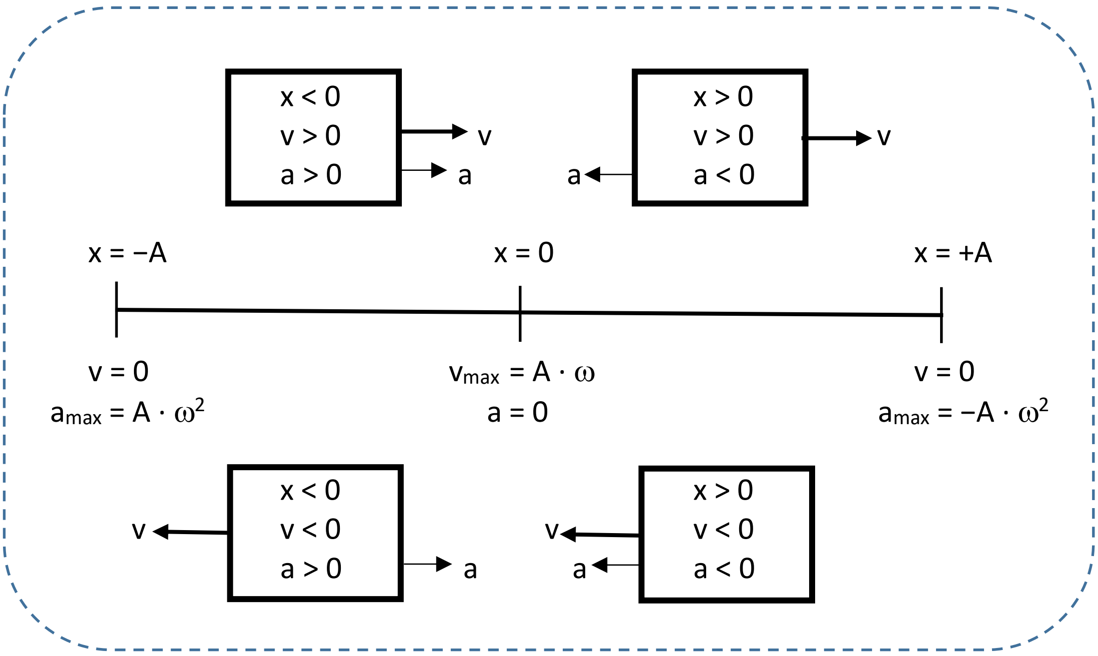
Si el seno vale 1, entonces x = A y cuando vale 0, entonces x = 0. Por tanto **la aceleración será máxima en los extremos** (x=±A) **y nula en el centro de la trayectoria** (x=0).

Si relacionamos la aceleración con la elongación nos queda:

$$a = -A \cdot \omega^2 \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \varphi_o) = -\omega^2 \cdot x \qquad \boxed{\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{\omega}^2 \cdot \boldsymbol{x}}$$

Esta expresión indica que la aceleración es proporcional a la elongación y de sentido contrario (signo -), y esto es lo que <u>caracteriza</u> a un m.a.s., lo que determina que un movimiento periódico sea o no m.a.s.

<u>*Criterio de signos*</u> de la aceleración: como la aceleración tiene signo contrario a la elongación, será positiva cuando el cuerpo esté en la parte izquierda del eje OX y será negativa cuando esté en la parte derecha.



(Ver ejercicios resueltos 6 y 7 de pág. 228)
(Hacer ejercicios 8 de pág. 228 y 29 y 30 de pág. 238)

Actividades de repaso del tema 8

M.C.U.

1) Una rueda de 0,5 m de radio gira a 20 rad/s. Calcular:
a) Periodo y frecuencia del movimiento *(0,315 s. ; 3,18 Hz)*
b) Tiempo que tarda en dar 100 vueltas completas *(31,4 s.)*
c) Ángulo recorrido en 5 minutos. *(6000 rad)*
d) Velocidad de un punto: A) del exterior, B) a 25 cm del centro. *(10 m/s ; 5 m/s)*

2) Un coche toma una curva con forma de circunferencia de 50 m de radio de curvatura con una rapidez constante de 72 km/h. Calcular:
a) Aceleración tangencial y normal de este movimiento. *(0 ; 8 m/s^2)*
b) Velocidad angular. *(0,4 rad/s)*
c) Periodo y frecuencia. *(15,7 s ; 0,064 Hz)*

3) El periodo del m.c.u. de un disco es de 5 s. Calcular:
a) Frecuencia y velocidad angular *(0,2 Hz ; 1,257 rad/s)*
b) Velocidad de un punto del disco a 10 cm del centro. *(0,13 m/s)*
c) Aceleración lineal (tangencial) de dicho punto. *(0 m/s^2)*
d) Ángulo y distancia recorrida por el punto anterior en 1 minuto. *(75,42 rad ; 7,542 m)*

4) Los discos que se usan en los tocadiscos (los LP) giran a un ritmo de 33 rpm. Calcular:
a) Velocidad angular, frecuencia y periodo. *(3,46 rad/s ; 0,55 Hz ; 1,82 s.)*
b) Tiempo que tardará el disco en girar 100 rad. *(28,9 s)*
c) Velocidad y aceleración de un punto situado a 15 cm del centro *(0, 52 m/s ; 1,8 m/s^2)*

M.C.U.A.

5) Una sierra eléctrica gira con una velocidad de 1000 rpm. Al desconectarla, se acaba parando en 5 s. Calcular:
a)La aceleración angular de frenado. *(- 20,94 rad/s^2)*
b)La aceleración lineal de los dientes de la hoja si ésta tiene un diámetro de 30 cm. *(- 3,14 m/s^2)*

6) Un motor es capaz de imprimir una velocidad angular de 3000 rpm a un volante en 10 s cuando parte del reposo. Calcular:
a) La aceleración angular del proceso. *(31,42 rad/s^2)*
b) ¿Cuántos radianes gira el volante en el tiempo anterior? *(1571 rad, aprox. 250 vueltas)*

7) Un volante gira a 3000 rpm y mediante la acción de un freno se logra detenerlo después de dar 50 vueltas. Calcula:
a) ¿Qué tiempo empleó en el frenado? *(2 s)*
b) ¿Cuánto vale su aceleración angular? *(- 157,1 rad/s^2)*

8) La velocidad angular de un motor aumenta uniformemente desde 300 rpm hasta 900 rpm mientras el motor efectúa 50 revoluciones. Calcula:
a) ¿Qué aceleración angular posee? *(12,6 rad/s^2)*
b) ¿Cuánto tiempo se empleó en el proceso? *(5 s)*

M.A.S.

9) Una partícula que oscila armónicamente con una amplitud de 15 cm tarda 1,5 s en realizar una oscilación completa. Sabiendo que en t = 0 su velocidad es nula y su elongación es positiva, determina:

a) La ecuación de su movimiento x(t). *($x=0,15\cdot sen(4\pi t/3 + \pi/2)$ m)*

b) La velocidad y la aceleración de la oscilación en t = 0,5 s.

c) Los valores absolutos de velocidad y aceleración máximas. *(0,628 m/s; 2,63 m/s^2)*

10) La ecuación de posición de un oscilador es: $x = 5 \text{ sen } (\pi t + \pi)$ cm.

Determina:

a) La amplitud, la frecuencia y el periodo de oscilación. *(0,05 m; 0,5 Hz; 2 s)*

b) La posición inicial de la partícula. *(0 m)*

c) La gráfica en los cuatro primeros segundos.

d) La velocidad y la aceleración del oscilador en t = 5 s.

e) La velocidad y la aceleración máximas. *($0,05\pi$ m/s; $0,05\pi^2$ m/s^2)*

11) Un oscilador armónico tiene una aceleración de 12 cm/s^2 cuando su elongación es de 3 cm. Si el valor absoluto de su aceleración máxima es de 16 cm/s^2, determina:

a) La amplitud, el periodo y la frecuencia. *(0,04 m; 3,14 s; 0,32 s^{-1})*

b) La ecuación de su movimiento si comienza a oscilar desde su máxima amplitud positiva.