VECTORES

1.- MAGNITUDES ESCALARES Y MAGNITUDES VECTORIALES.

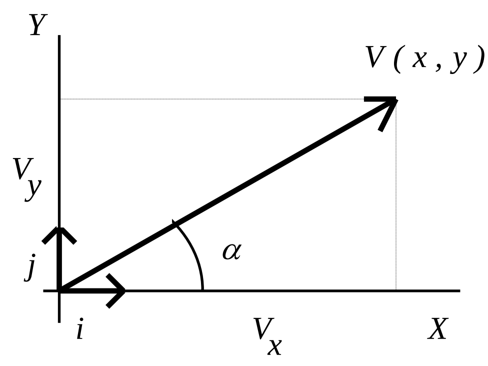
Magnitud es toda cualidad o propiedad de los cuerpos o de los fenómenos naturales que se puede medir y por tanto se puede expresar mediante números. Por ejemplo: la velocidad, la temperatura, el tiempo, la masa, etc. Sin embargo no son magnitudes el cariño, el dolor, el olvido, la razón...

Las magnitudes se pueden clasificar en dos grupos: escalares y vectoriales.

a) **Magnitudes escalares** o numéricas: son aquellas que quedan definidas por completo con un valor numérico. Son de este tipo: tiempo, masa, temperatura, trabajo, presión...

b) **Magnitudes vectoriales**: son aquellas que para quedar bien definidas se necesita conocer, además de su valor numérico (su módulo), la dirección y el sentido en los que actúan. A este tipo pertenecen: posición, velocidad, aceleración, fuerza...
Estas magnitudes se representan mediante vectores. La longitud del vector es su módulo y ha de ser proporcional a la medida de la cantidad que se representa..
Para distinguir las magnitudes vectoriales de las escalares a las primeras se les coloca una flecha encima de su símbolo o bien se escriben en negrita (**r**, **v**, $\vec{a}, \vec{F}$) y cuando nos queremos referir al módulo de un vector le quitamos la flecha al símbolo o bien lo escribimos entre barras (F ó $\left|\vec{F}\right|$).

2.- REPRESENTACIÓN DE VECTORES. COMPONENTES DE UN VECTOR.



Los vectores se suelen representar mediante coordenadas cartesianas, bien usando vectores unitarios o bien usando paréntesis: $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j}$ o bien $\vec{V}(x,y)$

Por ejemplo: $\vec{V} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$ o bien $\vec{V}$ (6,3)

Si en lugar de dos dimensiones (en el plano) usamos tres dimensiones (en el espacio) tendremos:

$$\vec{V} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \quad \text{o bien} \quad \vec{V}\ (6,3,-2)$$

A veces los vectores unitarios en lugar de representarse con los símbolos $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lo hacen como $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$. Así el vector anterior sería $\vec{V} = 6\ \vec{u}_x + 3\ \vec{u}_y - 2\ \vec{u}_z$

Otra forma de representar un vector es indicando su módulo, $\left|\vec{V}\right|$, y el ángulo que forma con uno de los ejes cartesianos, α.

Se denominan **componentes rectangulares** de un vector a las proyecciones de dicho vector sobre los ejes coordenados. En el dibujo las componentes del vector $\vec{V}$ son los vectores $\vec{V}_x$ y $\vec{V}_y$

Aplicando los conocimientos de trigonometría podemos fácilmente calcular las componentes de un vector dados su módulo y el ángulo que forma o bien dadas las componentes podremos calcular su módulo y su dirección (ángulo que forma con un eje). Veámoslo:

- Para el primer caso: : $V_x = |\vec{V}|\cdot\cos\alpha$ $\qquad V_y = |\vec{V}|\cdot\text{sen}\,\alpha$.
- Para el segundo caso: : $|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ $\qquad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{V_y}{V_x}$

3.- OPERACIONES CON VECTORES.

Ante todo debemos recordar que operar con vectores no es igual que operar con escalares (con números). Así, por ejemplo, al sumar escalarmente los números 2 más 2 siempre nos dará 4, pero sumando vectorialmente dos vectores de módulo 2 el resultado puede ser cualquier número comprendido entre 0 y 4, dependiendo del ángulo que formen dichos vectores.

a) **Suma y diferencia de vectores.**

Vector suma o *vector resultante* de varios vectores es el que tiene por componentes la suma de las componentes correspondientes de los sumandos.
Para los vectores $\vec{A}\,(A_x,A_y)$ y $\vec{B}\,(B_x,B_y)$ el vector resultante será: $\vec{A}+\vec{B} = \vec{R} = (A_x+B_x\,,\,A_y+B_y)$

La *regla del paralelogramo* permite hacer la suma gráfica de dos vectores (Fig.a).
Otro modo es aplicar la *regla del triángulo* (Fig.b).

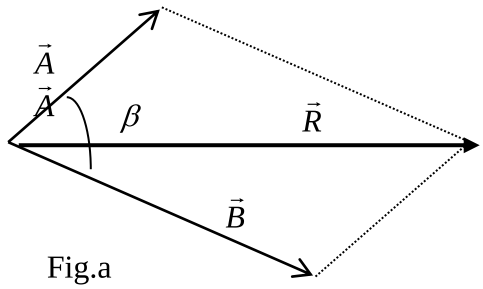


Fig.a

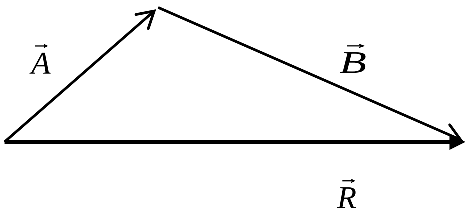
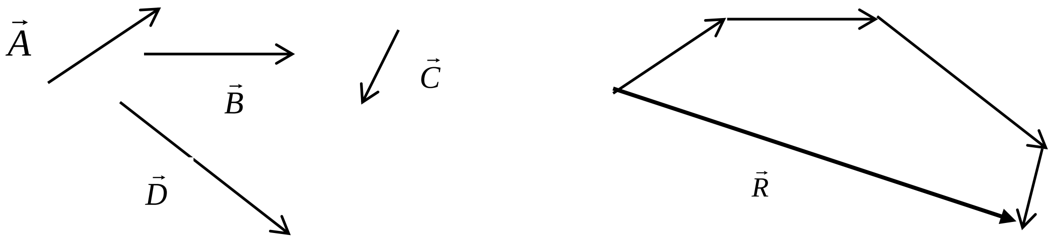


Fig.b

Analíticamente, el módulo de la suma de dos vectores que forman entre sí un ángulo β , se calcula mediante: $\left|\vec{R}\right| = \sqrt{\left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 + 2\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot\cos\beta}$

Para sumar gráficamente más de dos vectores se aplica la *regla del polígono* situando uno a continuación de otro:



Y para sumar más de dos vectores de forma analítica (numérica) hemos de descomponer cada vector en sus componentes rectangulares y luego sumar entre sí estas componentes.

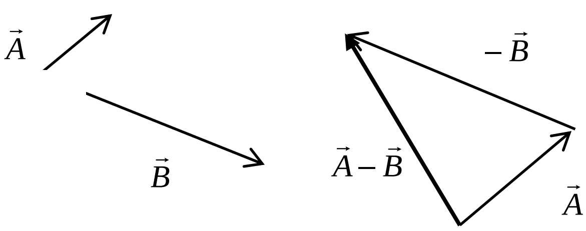
Vector diferencia de dos vectores es el que tiene por componentes la resta de las componentes correspondientes a ambos vectores.

$$\vec{A}\,(A_x,A_y)\ ;\ \vec{B}\,(B_x,B_y) \qquad \vec{A}-\vec{B} = (A_x - B_x\,,\,A_y - B_y)$$

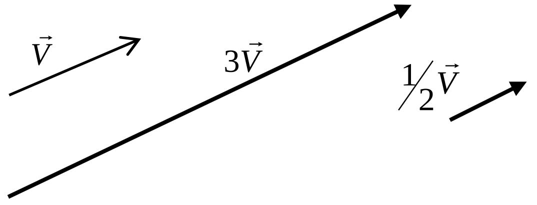
Para restar dos vectores se suma al minuendo el *vector opuesto* al sustraendo. El vector opuesto es el que tiene igual módulo y dirección, pero sentido contrario.

$$\vec{A}-\vec{B} = \vec{A}+(-\vec{B})$$

Diferencia gráfica



b) **Producto de un número por un vector**.



El producto de un número *n* por un vector $\vec{V}$, es otro vector de la misma dirección y sentido que $\vec{V}$, y cuyo módulo es $n\cdot|\vec{V}|$.

En función de las coordenadas:
Si $\vec{V}$ (V_x, V_y) entonces $n\cdot\vec{V} = (n\cdot V_x, n\cdot V_y)$

O bien si $\vec{V} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j}$ entonces $n\cdot\vec{V} = n\cdot x\ \vec{i} + n\cdot y\ \vec{j}$

c) **Producto escalar de dos vectores.**

Sean los vectores $\vec{A} = A_x\ \vec{i} + A_y\ \vec{j} + A_z\ \vec{k}$ y $\vec{B} = B_x\ \vec{i} + B_y\ \vec{j} + B_z\ \vec{k}$

Se define el producto escalar como: $\boxed{\vec{A}\bullet\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\alpha}$ *(1)*

y también podemos calcularlo mediante: $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x\cdot B_x + A_y\cdot B_y + A_z\cdot B_z$ *(2)*

Igualando las ecuaciones *(1)* y *(2)* : $|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos\alpha = A_x\cdot B_x + A_y\cdot B_y + A_z\cdot B_z$

Obtenemos: $$\cos\alpha = \frac{A_x . B_x + A_y . B_y + A_z . B_z}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$$

Expresión que permite calcular el ángulo α que forman dos vectores entre sí.

De la ecuación (1) se deduce que *el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero*.

EJERCICIOS SOBRE VECTORES

1.- Dados los vectores $\vec{a}$ (2,4,6) y $\vec{b}$ (1,-2,3). Calcular el vector suma $\vec{S}=\vec{a}+\vec{b}$ y su módulo y también el vector diferencia $\vec{D}=\vec{a}-\vec{b}$ y su módulo.

2.- Cierto vector tiene por módulo 15 y forma 30º con el eje X. Calcula sus componentes y escríbelo en notación vectorial en función de dichas componentes.

3.- Dados los vectores: $\vec{a}$ (3,-1) y $\vec{b}$ (-2,4). Calcular el producto escalar de ambos vectores y el ángulo que forman.

4.- Dados los vectores $\vec{A}$ (-2,3,1), $\vec{B}$ (3,0,2) y $\vec{C}$ (-1,2,4), calcula $(\vec{A}-\vec{B})\cdot\vec{C}$

5.- ¿Qué ángulo formarán los vectores $\vec{m}=-4\vec{i}+3\vec{j}$ y $\vec{n}=8\vec{i}+6\vec{j}$?.

6.- Sean los vectores $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}$ y $\vec{b}=-4\vec{i}+\vec{j}$ calcular:

a) El vector suma y su módulo.
b) El vector diferencia y el ángulo que forma con el eje OX.
c) El vector $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$.
d) El producto escalar de ambos vectores.

7.- Dados dos vectores $\vec{a}$ (2,-1,0), $\vec{b}$ (3,-2,1) y $\vec{c}$ (0, -2,1). Calcular:

a) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$ b) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$ c) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}$

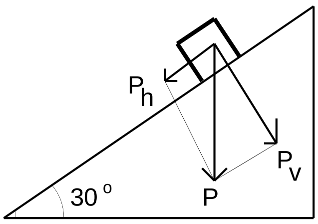
8.- Se tienen dos fuerzas concurrentes cuyos módulos son: F_1 = 5 N y F_2 = 7 N, que forman respectivamente los siguientes ángulos con el eje OX: 60º y 30º. Calcular:

a) La fuerza resultante.
b) Su módulo.
c) Ángulo que forma con el eje OX.

9.- El vector fuerza resultante de otros dos, de direcciones perpendiculares, vale 10 N. Si una de las fuerzas componentes es de 8 N, ¿cuanto valdrá la otra?.

10.- Un cuerpo se encuentra sobre un plano inclinado 30º según se aprecia en la figura. Si la componente de su peso perpendicular (P_v) vale 80 N:

a) ¿Cuanto vale el peso (P) del cuerpo?.
b) ¿Cuanto vale la componente del peso paralela al plano (P_h)?.



11.- Un velero navega hacia el norte con una velocidad de 16 km/h y la corriente lo arrastra hacia el este con una velocidad de 12 km/h. ¿Cuál es el valor de la velocidad real del barco?. ¿Con qué ángulo se mueve respecto al norte?.

12.- Dibuja el vector resultante de la suma de los tres vectores ($\vec{a}$,$\vec{b}$ y $\vec{c}$) de la figura y calcula su módulo.